STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING
LEIDING: PROF. DR D. VAN DANTZIG
ADVISEUR VOOR STATISTISCHE CONSULTATIE: PROF. DR J. HEMELRIJK

SP 69

Sur quelques questions de la théorie mathématique du choix pondéré

D. van Dantzig

mai 1959

The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for Pure Research (Z.W.O.) and the Central National Council for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

1. Introduction.

La première théorie mathématique élaborée des décisions est provenue de la terre française. C'était en 1785 que M. J.A.N. Caritat de Condorcet publiait son "Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix". Une partie de la théorie fut reproduite en 1812 par Laplace, qui, de coutume, oubliait de mentionner son précurseur, et en particulier en 1837 par Poisson qui ne l'oubliait pas.

Or, je regrette -- ou je ne regrette pas -- devoir dire que la France a produit des crus bien supérieurs, car la théorie de Condorcet est à peu près complétement fausse. Elle repose sur la supposition que les membres d'un tribunal, par exemple, ont une probabilité constante de donner un jugement vrai ou erroné , indépendant de la nature du cas spécial sous considération, et d'ailleurs que ces jugements sont indépendants l'un de l'autre. D'autre part c'est bien compréhensible que Condorcet devait utiliser ces suppositions implicites, afin de pouvoir se baser sur la distribution dite binomiale ou bernoullienne, car c'était à peu près la seule qui était connue à ce temps là. Ce n'était que plus d'un siècle plus tard que la première théorie des événements aléatoires dépendants ("enchaînés") fut développée par Markof et ce n'est qu'assez récemment qu'une telle théorie généralisée, connue comme la théorie des processus stochastiques, s'est répandue dans le monde et pénétrée dans presque tous les domaines de la mathématique, même de la science, même de l'organisation sociale et économique, même, oui, de la vie.

Le sujet, sur lequel les organisateurs du colloque me demandaient de parler ici était "la mathématique de la décision". Il est, évidemment impossible de donner dans le temps réservé pour cette conférence une idée, même fugitive, de ce domaine étendu, ni de mentionner les innombrables publications parues récemment, dont presque chacune serait digne d'être discutée plus ou moins amplement. Puisque, d'ailleurs, je ne peux dédier à ce domaine qu'une partie très restreinte du temps à ma disposition et ne peux que m'en occuper par ça et par là, je dois me restreindre à quelques aspects assez spéciaux dont j'ai pu prendre connaissance un peu plus intimement, soit par quelques-uns de mes travaux personnels, soit par ceux de quelques-uns de mes anciens élèves.

Or, puisque cette théorie, ou plutôt cet ensemble de théories, de même que leur application se trouve aujourd'hui dans une phase de développement bien turbulente, et puisque les initiateurs de ce colloque désiraient qu'aussi une attitude de critique serait représentée, il me semble utile de dire aussi par-ci par là quelques mots sur leurs bases logiques, et parfois sur leur manque de base logique. Toutefois cela peut entraîner une déception pour quelques lecteurs,à savoir que cette conférence sera trop "verbale", qu'elle contiendra trop de philosophie et trop peu de mathématique.

Les théories modernes des décisions proviennent de l'article "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele" de J. von Neumann de 1928, quoiqu'on doit ajouter qu'un peu avant lui, dans quelques notes, restées presqu'inconnues jusqu'à ce que M. Fréchet y tirait récemment l'attention, M. Emile Borel avait publié des idées s'approchant assez proche de la théorie de Von Neumann. Il est superflu de mentionner le fameux livre de Von Neumann et Morgenstern, quoique selon M. Gibrat le nombre des personnes qui en parlent est bien plus grand que de celles qui l'ont lu. Il n'est non plus nécessaire de mentionner le livre de A. Wald sur la "Statistical Décision Functions", ni les livres publiés par Tjalling Koopmans et ses collaborateurs, et bien d'autres travaux.

Le nom "théorie de la décision" n'est peut-être pas très bien choisi. Pour prendre une décision on n'a pas besoin d'aucune théorie; chacun peut prendre une décision, soit-elle fatale ou non! La difficulté ne consiste pas à <u>prendre</u> une décision, mais à soupeser bien les différentes mesures qu'on pourrait prendre, et à faire une étude comparative de leurs avantages et désavantages. Un nom qui exprimerait mieux la nature de cette science serait donc "théorie mathématique du choix pondéré", ou aussi "Ars ponderandi".

Le principe de la théorie est comme suit. Supposons qu'une personne (peut-être un individu représentant un état, une entre-

prise ou une autre communauté) a le choix parmi plusieurs lignes d'action afin d'atteindre un but déterminé. Au lieu de "lignes d'action" on dit le plus souvent "stratégies". Supposons connus 1^o. l'ensemble de toutes les stratégies réalisables qui peuvent servir à ce but, 2^o. la probabilité d'atteindre le but lorsqu'une quelconque de ces stratégies sera suivie, 3^o. l'avantage quantitatif d'atteindre le but, 4^o. le coût de suivre une quelconque de ces stratégies.
Les données 2^o et 3^o déterminent l'espérance mathématique de l'avantage liée à une stratégie. En prenant la différence avec le coût on obtient la balance de l'avantage expectée. On choisit alors parmi toutes les stratégies réalisables celle-ci (ou, lorsqu'il y en a plusieures, une telle) pour laquelle cette balance est aussi grande que possible ("maximale"). Remarquons que cela exige que l'"avantage" et le "coût" se laissent exprimer au moyen d'une même échelle, et que celle-ci soit additive, c.à.d. qu'ils suivent un axiome Archimedien. Plus généralement on peut considérer au lieu d'un but déterminé un ensemble de situations qui peuvent résulter d'une ligne d'action. D'ailleurs on peut remplacer les données 2^o,3^o et 4^o par une seule: soit connue pour une ligne d'action, quelconque un nombre déterminé, qui représente l'espérance de la balance des avantages et des désavantages qu'on obtiendrait lorsqu'on suivrait cette ligne. Cette espérance est donc une fonction déterminée sur l'ensemble de toutes les stratégies, et on choisit celle-ci (ou une telle) pour laquelle cette fonction est maximale.

Du point de vue de la mathématique le problème est bien simple: il s'agit de déterminer le maximum d'une fonction donnée sur un ensemble donné.

2. Le problème des digues.

Mentionnons un exemple, dont j'ai eu l'opportunité de parler auparavant. Il s'agit du problème des digues. Considérons une partie des Pays Bas protégée contre la mer par une digue. Cette protection n'est jamais parfaite. Quelque haute qu'on bâtit la digue -- et supposons pour raisons de simplicité que ce n'est que la hauteur d'une digue qui compte -- il reste toujours la possibilité qu'elle sera insuffisante et que le pays sera inondé. Plus haute qu'on fasse la digue, plus chère elle est, et moins probable l'inondation, donc moins haute devient l'espérance du dommage. En effet, on prendra la somme pour toutes les années futures des produits de la probabilité qu'une inondation parviendra dans cette année et la valeur actuelle de la perte qu'elle causera. Avec quelques restrictions on peut admettre que tout cela est connu en fonction de la seule variable à déterminer, à savoir l'augmentation X de la hauteur de la digue.

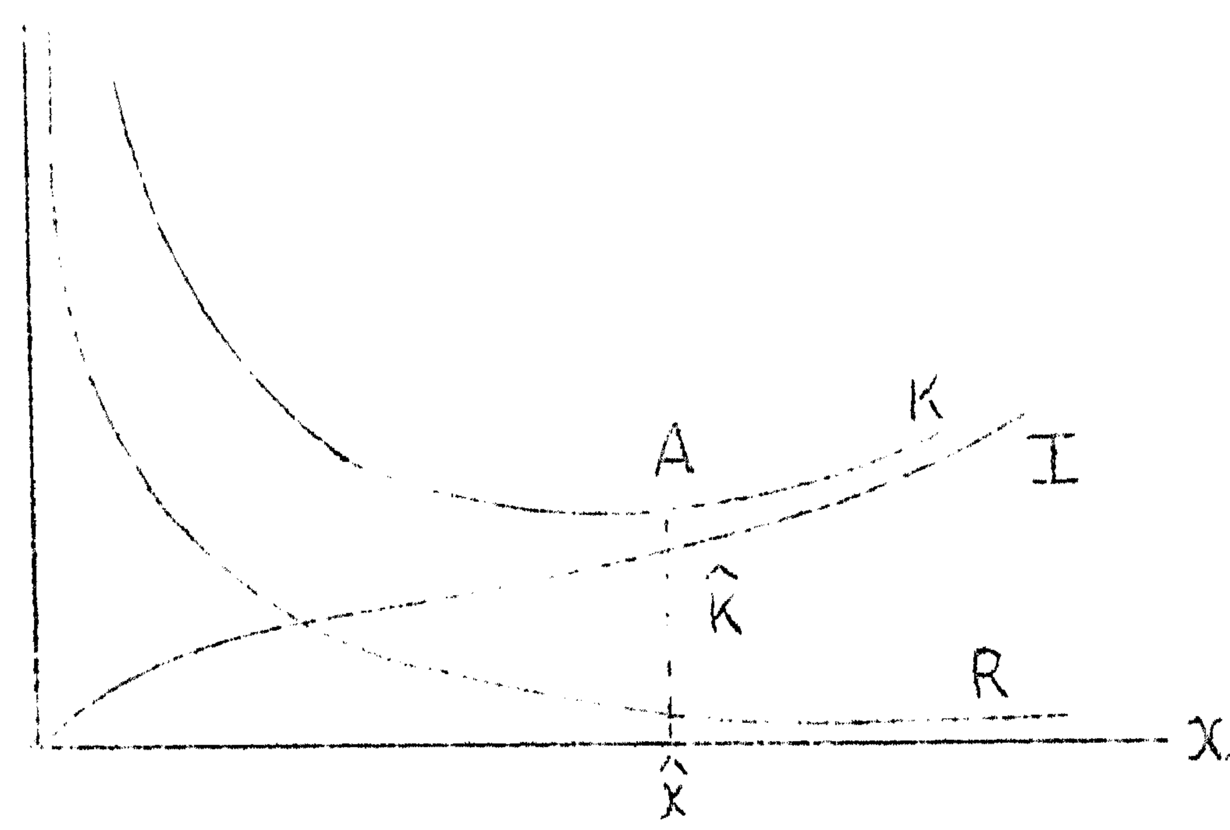

fig. 1

Dans la figure 1 R représente la valeur actuelle de la perte totale en fonction de X, et I le coût de rehaussement. La "balance" est donnée par K, ici la somme (au lieu de la différence) de R et I. Elle atteint son minimum $\hat{K}$ pour $X=\hat{X}$ au point A.

Or, en réalité la situation est beaucoup plus compliquée, puisque la fonction R dépend de plusieurs paramètres que l'on ne connaît qu'assez grossièrement. D'abord la probabilité d'excédance d'un niveau quelconque n'est pas constante au cours du temps. On sait qu'elle croît à cause de la montée séculaire du niveau de la mer dûe à la gelée des massifs de glace polaire et de la baisse du sol dans les Pays Bas. Mais on ne connaît pas la valeur numérique de cette croissance. Il existe des théories géologiques qui servent à expliquer et à maîtriser quantitativement ces deux phénomènes, mais ces théories-là ne sont pas incontestables. Que doit on faire dans un cas comme celui-ci? Attribuer d'après Bayes et Laplace des probabilités à la vérité de plusieurs théories qui se contredisent? Mais ces probabilités ne peuvent qu'être choisies tout à fait arbitrairement.

Ce qu'il faut faire -- ou tâcher de faire -- dans un cas comme celui-ci, ce n'est pas choisir arbitrairement une distribution de probabilités, mais changer la "stratégie" tellement que le résultat devient (autant que possible) indépendant de ces paramètres inconnus. Dans l'exemple considéré on applique ce principe en ne tenant compte que de la probabilité d'excédance qu'on a aujourd'hui et en adaptant les régénerations futures des digues aux niveaux relatifs qu'on constatera à ces temps là.

Or, de cette manière on ne peut pas disposer de tous les paramètres insuffisamment connus. Il reste encore un degré d'incertitude considérable. En utilisant les valeurs les plus favorables de ces paramètres qui nous paraissent réalistes, on obtient une courbe "optimiste" O pour K, tandis que l'ensemble des valeurs les plus défavorables donne une courbe "pessimiste" P. Evidemment il y a tout un continu de courbes intermédiaires (fig.2). De nouveau la question se pose: que faire? Une fois de plus la méthode la plus séduisante pour le mathématicien c'est d'attribuer des probabilités déterminées (ou des "poids") à tous les cas possibles (ou aussi choisir un "index d'optimisme" selon L. Hurwicz), et de faire comme si le minimum de l'espérance mathématique ainsi obtenu est l'optimum vrai. Or, on peut d'après Von Neumann prendre le minimax, c'est à dire le minimum de la courbe la plus "pessimiste". C'est en tout cas l'attitude la plus prudente, quoiqu'il n'a pas de sens de prétendre que "la nature" s'efforce autant que possible à ruiner notre pays.

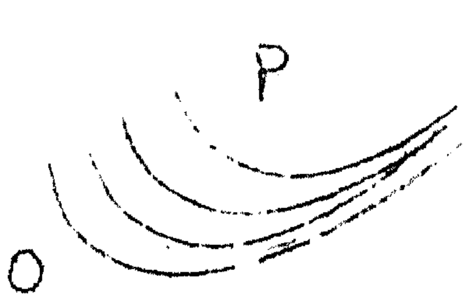

fig. 2

Quoiqu'on sait qu'en général il y a bien d'objections contre la méthode minimax, le cas échéant montre un aspect en sa faveur. C'est que les courbes $K=f(X)$ montent beaucoup plus rapidement vers le gauche que vers le droit du minimum. Donc en sous-estimant l'abscisse $\hat{X}$ du minimum le "regret" $f(X)-f(\hat{X})$ est beaucoup plus grand qu'en la sur-estimant d'une même quantité: $f(\hat{X}-a)-f(\hat{X}) \quad f(\hat{X}+a)-f(\hat{X})$. [1]

---

1) On peut considérer le "regret" comme la partie de la perte totale qu'on doit attribuer à notre ignorance partielle concernant les valeurs des paramètres.

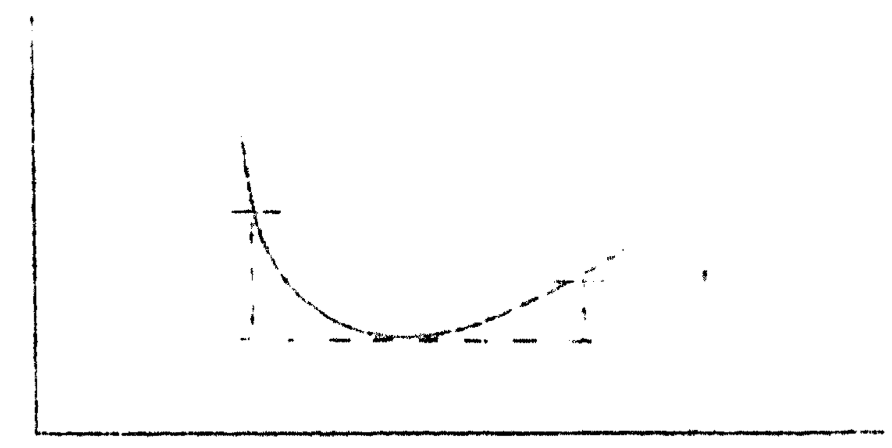

fig. 3

Pour cette raison une sous-estimation non-négligeable est beaucoup plus désavantageuse qu'une sur-estimation peut-être bien plus grande. Mais ce n'est point du tout le cas dans toutes les applications, où l'allure des courbes peut être bien différente de celle de la figure 1. Puisqu'une grande précision n'a aucune raison d'être, parce que notre modèle mathématique montre une simplification assez crude de la réalité, on conclura seulement du principe d'optimation 2) qu'il est désirable de ne rester beaucoup au dessous de l'abscisse qui rend minimum la courbe "pessimiste". Toute conclusion très précise serait tout à fait illusoire.

Je me passerai de plusieurs autres difficultés et objections qu'on pourrait faire et des généralisations possibles de ce problème.

En 1954 J. Milnor a comparé quatre procédés de décisions: ceux de Laplace (équiprobabilité), de [Von Neumann] Wald (minimax), de Hurwicz (index d'optimisme) et de Savage (minimax regret), et il a dressé un système d'axiomes très intéressant auquel il veut soumettre toutes les décisions. Je voudrais y ajouter les trois conditions -- de nécessité assez vagues -- mentionnées ci-dessus: éviter une précision des conclusions non justifiée à cause de l'imprécision des données; rendre la conclusion autant que possible indépendante de petites variations dans les données, et se contenter d'une solution "suffisamment bonne" mais sub-optimale, au lieu de chercher "la" solution optimale fictive.

----

2) En français la plupart des verbes dérivés d'un adjectif (presque toujours du positif) sont formés au moyen d'un préfix, p.e. a-grand-ir, em-bel-lir, a-mélior-er, ra-fraîch-ir, etc. Quelques-uns sont formés au moyen de -fier (latin:ficere), comme magnifier, vérifier, intensifier, ou de -iser (égal-iser, normal-iser, etc.) Des formes comme minimaliser, qu'on rencontre parfois semblent difficiles à justifier. Le "Petit Larousse" mentionne "maximer" et "minimiser". Je propose d'utiliser systématiquement pour "rendre maximum" etc. ou bien: "maximer, minimer, optimer (analogue avec libér-er, doubl-er, quadrupl-er, etc.) ensemble avec maximation, etc. (ou bien: maximiser, minimiser, optimiser avec maximisation, optimisation, etc., ce qui semble moins préférable).

3. Le problème des stocks.

Depuis les travaux, déjà classiques, de P. Massé (1946), de Arrow, Harris et Marschak (1951) et de Dvoretzky, Kiefer et Wolfowitz (1952) le problème de stockage a obtenu beaucoup d'attention.

Qu'il me soit permis de me restreindre à un seul aspect, que je crois être plus ou moins neuf, et qui, pour ainsi dire, est encore "sous construction". Il s'agit d'une recherche, pas encore publiée, de M. G. de Leve, un de mes anciens élèves, laquelle semble admettre de traiter une classe assez étendue de problèmes de stockage. On suppose que les ventes de plusieurs marchandises peuvent être décrites aux moyen de fonctions aléatoires stationnaires, et que les temps d'attente entre les instants où une commande est faite et où elle est délivrée aussi sont aléatoires. Alors la situation entière se laisse décrire par un processus de Markof stationnaire dans un ensemble déterminé (par exemple un espace R à une infinité de dimensions, tel que toutes les coordonnées sauf un nombre fini -- aléatoire - sont zéro). On choisit une stratégie qui consiste d'un sous-ensemble A de R, utilisé comme "région d'action", et d'une règle d'après laquelle on transfert le système aléatoire dès qu'il entre dans A à un point appartenant au complément de A. Alors on peut démontrer sous quelques conditions non trop restrictives que la suite des points successifs où le système aléatoire entre dans la région d'action est une réalisation d'une chaîne de Markof stationnaire dans A. On suppose connues les probabilités de transition dans R, de même que le coût accompagnant une réalisation quelconque du processus et aussi le coût d'une effectuation de la stratégie (partant d'un point quelconque de A). On choisit une "règle de terminaison" ("stopping rule"), par exemple en convenant que le processus sera terminé dès que le stock se réduira a zéro. Alors on peut approximer le processus de Markof dans A par une suite de processus P_n qu'on obtient en convenant que le système ne sera rejeté en dehors de A que n fois ou plus et qui d'ailleurs sont assujettis à la règle de terminaison choisie. On peut attribuer l'espérance mathématique de la perte totale pendant une intervalle de temps donnée aux points successifs (aléatoires) où le processus entre dans A. L'espérance de la perte attribuée à la n-ième action est alors la différence des espérances de deux processus P_{n-1} et P_n. De même on peut subdiviser le temps en périodes lesquelles aussi sont attribuées aux points de A. [3)]

Soit φ le quotient de l'espérance de la perte attribuée et l'espérance de la longueur attribuée de la période de temps. Les espérances se rapportent à la distribution absolûment stationnaire du processus de Markof stationnaire dans la "région d'action". Sous des conditions non trop restrictives, mais par exemple, entraînant l'ergodicité, on peut montrer que la stratégie est optimum, pour laquelle φ est minimum. En tout cas on peut juger si une stratégie déterminée est préférable à une autre ou non. Enfin, sous des conditions convenables plus restrictives on peut s'attendre à ce que la stratégie $\hat{S}$ optimale se laisse déterminer comme la limite pour $n \to \infty$ d'une suite de stratégies $\hat{S}_n$, qui ne sont optimales que sous la condition supplémentaire que le système ne sera rejeté en dehors de A que n fois au plus et que les dernières n-1 décisions ont été prises à cause de la stratégie $\hat{S}_{n-1}$.

Tout en admettant que plusieurs questions concernant cette méthode n'ont pas encore obtenu de réponse, on peut s'attendre à ce que cette idée de M. de Leve se montrera bien fertile, et qu'elle admettra des généralisations pour la perturbation stratégique des processus de Markof assez généraux, accompagnées de pertes continuelles.

4. Critique de quelques principes de la théorie.

Dans la dernière partie de cette conférence je veux discuter brièvement les principes généraux de la "théorie de la décision". Il va sans dire qu'une discussion épuissante exigerait un livre comme l'essai excellent de Luce et Raiffa (1957).

L'applicabilité de la théorie de la décision doit elle-même être considérée comme un problème de décision. Et il semble bien que jusqu'ici -- mais cela peut très bien changer lorsque la recherche opérationnelle sera trop commercialisée -- elle se

----

3) Au lieu du temps on peut choisir une fonction croissante indéfiniment avec le temps, laquelle est indépendante de la stratégie à suivre.

justifie puisque le coût d'une telle recherche est très souvent insignifiante en comparaison avec le gain qu'elle entraîne. D'ailleurs, du point de vue de la science, on ne peut pas nier qu'elle a beaucoup contribué à l'éclaircissement des idées sur le comportement de l'homme envers le choix entre plusieurs lignes d'action dont l'issue est incertaine.

D'autre part, cette élucidation à laquelle le génie de Von Neumann, Wald et bien d'autres ont tellement contribué, est encore loin d'être parfaite. Au contraire, les objections qu'on peut et qu'on doit faire contre les principes même de cette théorie sont très nombreuses. Je n'en mentionnerai que quelques-unes, dont plusieures ont été discutées déjà par d'autres auteurs.

Plus d'une fois déjà j'ai eu l'opportunité de m'opposer contre l'emploi dans la statistique des soi-disant probabilités subjectives (ou, d'après Savage, personnelles), donc des probabilités qui ne s'appuient pas sur des données observables, mais seulement sur le jugement personnel d'une situation par un individu. Je n'y reviendrai pas ici. J'y veux seulement ajouter que l'étude objective -- ou plutôt aussi objective que possible -- des probabilités subjectives a sans doute une grande importance. Des recherches très intéressantes de cette nature ont été faites p.e. par Mosteller et Nogee (1951), S. Vail (1954), Kalisch, Milnor, Nash et Darling (1954), D. Davidson et P. Suppes (1957) et bien d'autres.

Au lieu de soumettre les probabilités subjectives à un système d'axiomes on pourrait même se demander comment elles dépendent du métabolisme, de l'équilibre hormonale, de la traumatique psychologique et du complexe d'Oedipe d'une personne. Sans doute, une question d'importance pour la théorie des décisions est de se décider si l'on prendra une décision avant ou après le dîner, et laquelle quantité de vin qu'on buvra sera optimale. Mais on ne peut guère maintenir que "l'art de pondérer" se réduit à des questions comme celle-ci.

La plupart des nombreuses axiomatiques qu'on possède aujourd'hui exigent l'ordre complet, soit des probabilités, soit des utilités, soit des activités possibles. Or, en demandant cela on oublie qu'un homme -- à part même du changement de ses désirs au cours du temps -- n'est pas une unité indivisible. Même sans faire des expériments psychologiques on peut savoir que les préférences d' un seul individu même à un seul instant peuvent montrer des contradictions semblables à celles qu'on connait depuis Condorcet dans les préférences d'un groupe. Supposons qu'un mathématicien a le choix entre trois postes. Du point de vue scientifique l'ordre de préférence peut être $A \succ B \succ C$, tandis que pour son épousse elle serait $C \succ A \succ B$ et pour ses enfants $B \succ C \succ A$. Puisque l'individu s'identifie plus ou moins avec sa science, avec sa femme et avec ses enfants, ses préférences individuelles en tant que savant, en tant que mari et en tant que père de famille se contredisent de la même manière. Exiger que ses préférences personnelles soient consistantes équivaut à exiger que celles d'un groupe le soient. Donc condamner une telle inconsistance comme "irrationnelle" c'est s'éloigner complètement de la réalité de la vie. D'ailleurs on peut rencontrer ici les instabilités connues de la théorie des coalitions. Supposons que le collègue le plus important avec lequel il espère collaborer à A meurt soudainement. Alors il peut très bien arriver qu'il n'ira pas à B, mais qu'il choisira la solution la plus agréable pour sa femme. Ceci peut arriver p.e. lorsque l'ordre de préférences $A \succ B \succ C$ existera ensemble avec l'ordre de préférences Sciences $\succ$ Femme $\succ$ Enfants. En effet, ce qu'il fera dans la plupart des cas, ce n'est pas ordonner ce dernier ensemble S,F,E, ni résoudre son problème au moyen d'une stratégie dite mixte, mais chercher une solution en dehors du schème donné. Par exemple il cherchera des moyens afin que, tout en acceptant A, il peut rendre la vie à A tellement plus agréable pour sa femme et améliorer tellement l'éducation à A pour ses enfants que leurs ordres de préférences se changent.

Quant à la notion d'utilité plusieurs auteurs veulent la rapprocher à celle de la "valeur morale" de Daniel Bernoulli, laquelle dépend de la fortune qu'on possède. Soit $U(a|A)$ l'utilité d'obtenir une somme d'argent a (positive ou négative), lorsqu'on possède A. Alors ou bien les utilités d'obtenir successivement plusieurs sommes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ne seraient pas additives [4] ou bien il existe une fonction $u(A)$, telle que

---

4) Ce n'est pas irréaliste, sans doute, mais en admettant cela la réduction de Von Neumann d'un jeu à sa forme normale ne serait plus possible.

$$u(a|A) = u(A+a)-u(A),$$

c'est à dire elle ne dépend que de l'utilité du capital total que l'on possède. Supposons u(a) non linéaire, et supposons qu'on joue une série de jeux de hazard identiques où l'on peut toujours gagner une somme d'argent a ou zéro. Lorsqu'on a gagné m jeux d'entre n, l'utilité sera devenue

$$\underline{u}_n(A) = u(A+\underline{m}a),$$

donc un nombre aléatoire puisque m est un tel. Evidemment la supposition qu'un jeu sera à somme nulle ne peut se maintenir que pour un seul jeu. Car lorsque les deux joueurs possédaient au commencement les sommes A et B ayant les utilités u(A) et v(B) et qu'on a

$$u(A+a)-u(A)=v(B)-v(B-a)$$

cette relation peut servir à déterminer a, et elle n'entraîne nullement que

$$u(A+ma)+v(B-ma)=u(A)+v(B) .$$

En général deux personnes ne pourraient jouer un jeu à somme zéro que pour une mise bien (quoique peut-être non uniquement) déterminée. Par exemple pour $u(x)=v(x)=\log x \quad (x > 0)$ on devrait avoir a=0 ou a=B-A, c'est à dire lorsque la supposition de Daniel Bernoulli est valable, le seul jeu à somme zéro (des utilités) entre deux personnes serait un pari pour l'échange de leurs fortunes contre le status quo. Pour $u(x)=\alpha \log x+c_1$, $v(x)=\beta \log x +c_2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on obtient aussi à part de a=0 une seule autre valeur de a entre -A et B.

A côté des difficultés souvent discutées de l'impossibilité de transférer des utilités, il y en a donc des pareilles lorsqu'on veut répéter souvent un même jeu, tout en interprétant les enjeux comme des utilités.

Plusieurs auteurs croient devoir attribuer une utilité déterminée (positive ou négative) au risque lui-même, en comparaison avec la sécurité.

Supposons qu'on offre à une personne "aimant le risque" un jeu, où il gagne 0 avec probabilité 1-p ou une somme ayant une utilité U avec probabilité p. Soit U très grand, p très petit.

L'espérance de l'utilité du gain est donc μ=Up. Soit R l'utilité attribuée à la variance de ce jeu. En choisissant p suffisamment petit, on peut avoir $0<\mu<R$. Il voudra donc payer $\mu+R$ pour jouer ce jeu.

Proposons maintenant à cette personne, aimant tellement le risque de gagner 0 avec probabilité 1-p et de perdre une telle somme que le gain en utilité est -U. Alors l'espérance est - ; la variance est la même. S'il attribue encore l'utilité R à la dispersion, il voudra payer une somme <u>positive</u>, correspondante avec $R-\mu$, afin d'avoir le plaisir d'obtenir une petite probabilité de perdre une somme énorme sans qu'il y ait aucune possibilité de gain.

Pour rendre l'exemple plus clair, supposons que les utilités sont proportionnelles avec les sommes d'argent. Soit R=2, $\mu=1$, p.e. $p=10^{-5}$, $U=10^{5}$. C.à.d. afin d'avoir une probabilité 10^{-5} de gagner 10^{5} on veut bien payer 3 au lieu de 1, ce qui est tout à fait naturel. Cela impliquerait qu'on voudrait bien payer 1 afin d'obtenir la probabilité 10^{-5} pour perdre 10^{5}, sans qu'il y ait un gain compensateur!

Evidemment, quoiqu'en disent Von Neumann et Savage, la notion d'utilité reste aujourd'hui à peu près aussi mal fondée que jamais.

5. Un "Dutch book".

Dans un livret assez récent les auteurs (Davidson and Suppes) disent que jouer sans tâcher de maximer l'espérance mathématique de l'utilité est un "Dutch book", une expression qui ne m'est pas connue. En vue de ce que l'anglais emploit le mot "Dutch" de préférence pour désigner la stupidité, ou d'autres traits de caractère semblables, je me suis demandé si ce mot désigne ici la stupidité.

Donnons un exemple. Considérons un jeu où le joueur ou bien gagne 2 avec une probabilité q=1-p, ou bien perd $\frac{q}{p}$ avec une probabilité p, les gains et les pertes étant exprimés comme différences d'utilités après et avant le jeu. (Or, nous pouvons les identifier ici avec les enjeux monétaires). Donc le gain aléatoire $\underline{G}$[5] est donné par

----

5) Les aléatoires sont désignées par des lettres soulignées, les valeurs qu'elles prennent dans une réalisation par les mêmes lettres non-soulignées.

$$(5.1) \qquad \underline{G} = \begin{cases} 2 & \text{avec probabilité } q \\ -\frac{q}{p} & \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad p \end{cases}$$

L'espérance $\mu = \mu(p)$ du gain est alors $\mu = q$. Supposons que le joueur peut déterminer librement la probabilité p, pourvu qu'il dépose auparavant la somme à payer s'il perd. Lorsqu'il suit la méthode mentionnée, F étant sa fortune, il doit donc maximer q sous la seule restriction

$$(5.2) \qquad \frac{q}{p} \leq F,$$

c.à.d. choisir $\frac{q}{p} = F$ ou $p = \frac{1}{F+1}$. Remarquons que les règles du jeu empêchent que la probabilité p de perte soit zéro. Or, cela signifie qu'il doit mettre en jeu toute sa fortune (naturellement finie): s'il perd, il est ruiné. Cet "optimum" est unique.

Supposons qu'il joue ce jeu un grand nombre de fois. Alors sa fortune $\underline{F}_n$ après n jeux devient aléatoire, à savoir dépendante des gains et pertes antérieurs. De même les probabilités $\underline{p}_{n+1}$ $(n \geq 0)$ deviennent aléatoires. Supposons la fortune initiale F_0 donnée. La probabilité de gagner dès le commencement n fois en succession est alors

$$(5.3) \qquad \prod_1^n q_k = \prod_1^n \frac{F_{k-1}}{F_{k-1}+1} = \prod_1^n \left(1 - \frac{1}{F_0+2k-1}\right).$$

Or, cette probabilité tend à zéro pour $n \to \infty$. Donc la ruine du joueur après un nombre fini de jeux est certaine. Dès qu'il est ruiné, disons $F_n = 0$, on aura $q_{n+1} = 0$, donc $F_{n+1} = 0$. Donc il n'a aucune possibilité de se récupérer. Il n'est point du tout nécessaire de supposer qu'il joue une série de ces jeux; on peut très bien admettre qu'il ne joue que de temps en temps, disons, le samedi soir, parfois, et qu'entretemps il a d'autre revenues. Ce n'est que si ces autres revenues entre deux jeux consécutifs croissent plus rapidement que $n^{1+\varepsilon}$ avec $\varepsilon > 0$ que la probabilité de ruine ultérieure reste < 1.

Supposons maintenant qu'il ne tâche pas de maximer le gain espéré. Il peut alors disposer librement des p_n, toujours sous la condition $q_n \leq p_n F_{n-1}$. Par exemple il peut choisir pour chaque n $q_n = 0$. Dans ce cas-ci il ne perd rien, mais d'autre part il ne gagne rien. Il peut aussi choisir par exemple

$$\frac{q_n}{p_n} = 2^{-n} F_o . \tag{5.4}$$

Ici les q_n ne sont pas aléatoires. Alors, dans n jeux la plus grande perte possible est $\sum_1^n \frac{q_k}{p_k} < F_o$. Donc il ne sera jamais ruiné, tandis qu'il gagnera dans le cas le plus favorable 2n, et que l'espérance de son gain sera

$$\sum_1^{n-1} q_k = F_o \sum_1^{n-1} \frac{1}{F_o+2^k} \tag{5.5}$$

donc borné, environ $2F_o$ pour un F_o petit, mais en tout cas positif. Evidemment il peut varier sa stratégie de beaucoup de manières sans risquer sa ruine, et en tenant toujours une bonne chance de gain. Mais tâcher de maximer le gain probable serait la chose la plus stupide qu'il pourrait faire.

Quant à la signification du term "Dutch book", lorsqu'il doit désigner la stupidité, on aura vu que non-maximer l'espérance du gain dans ce jeu-ci ne serait point du tout un "Dutch book", mais que la maximer le serait!!

Cet exemple ne sert ni à désapprouver des recherches intéressantes de Davidson et Suppes, ni à rejeter la méthode de maximation de l'espérance du gain en général. Cette méthode se laisse très bien utiliser pourvu que 1° il s'agit d'un grand nombre de décisions plus ou moins semblables, de même que la loi forte des grands nombres se laisse appliquer, 2° les probabilités soient bien connues et aient une signification objective afin que l'emploi de l'espérance mathématique se laisse justifier, 3° les gains soient exprimés, en différences d'utilités, de même qu'elles soient additives, 4° il ne s'agit que des pertes modérées.

D'ailleurs l'exemple a été choisi "extrémiste" pour élucider l'idée. Même si le cas de perte n'entraîne pas la ruine totale mais seulement un détriment très sérieux, il ne serait point du tout sage, non seulement de tâcher de maximer l'espérance du gain, mais aussi de l'approcher trop du maximum. Une augmentation modérée de l'espérance du gain ne vaut souvent pas que l'on risque une perte peu probable mais désastreuse.

Dans les cas comme celui-ci il n'existe de méthode de décision généralement applicable. Le principe minimax ne tient compte que des pertes désastreuses; le principe de maximer la moyenne n'en tient compte qu'insuffisamment.

6. La théorie des coalitions.

En vertu de la théorie grandiose des coalitions de Von Neumann et Morgenstern on a remarqué qu'aujourd'hui la grande politique est beaucoup trop difficile pour les politiciens.

Est-ce qu'elle ne l'est pas pour les mathématiciens?

On sait maintenant que, nonobstant ses grandes mérites cette théorie a plusieurs défauts, et il y a déjà quelques travaux, quoique pas encore très nombreux, qui servent à l'améliorer.

La faiblesse principale de la théorie est qu'elle embrasse trop. D'abord, en 1928, Von Neumann n'a voulu donner qu'une théorie des jeux de société, quoiqu'il était conscient déjà de la possibilité d'applications d'une teneur beaucoup plus ample. Mais depuis on a voulu appliquer la théorie telle quelle, et sans altérations profondes, aux situations économiques, sociologiques, militaires et politiques, et dès alors la théorie est trop simplifiée pour pouvoir représenter les phénomènes réels. Mentionnons quelques-unes des déviations principales.

1. Dans son article original Von Neumann n'a utilisé que les gains monétaires. Depuis la notion économique mal définie par outrance, "l'utilité" a été introduite dans la théorie des jeux et des coalitions. Ce n'est qu'au moyen d'expériments compliqués que les psychologues ont pu tâcher de déterminer approximativement les "utilités" qu'un petit nombre de personnes attachent à quelques résultats de jeux extrêmement simple. Dès qu'on veut considérer des situations plus réalistes personne ne sait s'il est possible d'attribuer des utilités consistantes aux issues des actions, et si oui, lesquelles sont leurs valeurs numériques. Il serait donc bien utile de se débarrasser dès que possible de cette transplantation monstrueuse.

2. Von Neumann a choisi le principe de maximer l'espérance du gain. C'est un principe bien naturel si et seulement si a) l'espérance est basée sur une répartition de probabilités qui représente un caractère réel du jeu, par exemple l'invariance de la méthode de jouer par rapport à un groupe transitif de permutations (comme dans le cas des dés sans biais, des lotteries bien contrôlées, etc.); b) le joueur joue un grand nombre de jeux indépendants,

mais non nécessairement identiques ou même semblables, de même que la loi forte des grands nombres se laisse appliquer; ceci implique une condition de négligeabilité asymptotique stochastique des jeux partiels, donc cela exclue les jeux isolés impliquant une probabilité positive d'une perte désastreuse, tandis que les probabilités très petites deviennent automatiquement négligeables; c) le joueur se garde contre les possibilités de déviations considérables de l'espérance dans un petit nombre de jeux, comme on le fait dans la pratique actuarielle en formant une réserve spéciale. Car en réalité le joueur n'a aucun intérêt réel à l'espérance mathématique du gain, mais seulement à l'issue réelle, donc stochastique, et ce n'est que la loi forte des grands nombres qui justifie le remplacement de la dernière par la première. Dans les applications économiques cela veut dire que l'on répartit ses placements sur beaucoup d'objets à peu près indépendants, au lieu de jouer son va-tout. (Cf. l'exemple du § 5). Remarquons que même dans le problème des digues l'emploi de l'espérance de la perte n'est pas facile à défendre.

3. Lorsqu'on va au dela des jeux de société on rencontre beaucoup de cas où la considération d'une seule valeur, par exemple monétaire, ne suffit plus. C'est déjà le cas dans les applications à la statistique. D'autant plus dans la théorie des coalitions, où le désir du "pouvoir", de l'estime et la reconnaissance des autres, "la panache" jouent un rôle, parfois exorbitant. Ici on rencontre les mêmes difficultés que par rapport à l'utilité: il n'y a pas de moyen de mesurer ses valeurs-là. Il y a déjà des efforts intéressants,p.e. de Hausner (1954) à introduire des valeurs multidimensionnelles, et il serait très désirable d'aller plus loin dans cette direction là, en étudiant un ensemble d'issues d'une action, qui n'est que partiellement ordonné, et en ne cherchant des stratégies "dominantes", mais se restreignant aux stratégies "non-dominées". Considérons une population, disons de poissons. Ils ont deux utilités: la préservation de l'individu, et la préservation de l'espèce. Mais qu'est-ce que c'est optimal: qu'un petit nombre peut vivre bien pendant un an et est alors dévoré, ou qu'un grand nombre peut se maintenir pendant dix ans, en menant tout le temps une vie misérable? Les implications de cette question pour l'espèce humaine sont évidentes.

4. Le problème de la stabilité d'une règle de décision a été introduit par H. Simon (1952). Dans un cas spécial du problème des stocks il se sert de la théorie des servo-méchanismes pour obtenir qu'ou bien les fluctuations du stock ou bien celles de la production s'amortissent; dans le cas qu'il étudie il est impossible de prévenir des fluctuations grandes de tous les deux. Il serait très désirable de généraliser et d'approfondir ces résultats et d'aborder les problèmes de stabilité en général. Une méthode pour faire cela consisterait de se servir de l'analogie avec la méchanique rationnelle, rendue stochastique, en rapprochant le principe de minimer l'espérance de la perte avec le principe de Hamilton. Le coût total correspond alors avec l'action; le coût par unité de temps avec la fonction de Lagrange.

5. Sur les questions de stabilité des coalitions il n'existe encore qu'un petit nombre de travaux. Sous les conditions de Von Neumann et Morgenstern les coalitions sont extrêmement instables, beaucoup plus qu'elles ne le sont en réalité.

Souvenons nous que d'après Von Neumann (1928) chaque jeu à n personnes détermine pour chaque coalition virtuelle C (c'est à dire pour chaque sous ensemble de l'ensemble E des joueurs) un nombre v(C), la <u>valeur</u> de C, telle que pour deux sous ensembles A et B <u>disjoints</u> quelconques

$$v(A+B) \geqslant v(A) + v(B). \tag{8.1}$$

Donc v est une fonction d'ensemble "sur-additive" sur E.
En passant à un jeu équivalent on peut toujours supposer que $v(X)=0$ dès que X contient un joueur au plus. Alors $v(X) \geqslant 0$ pour chaque $X \subseteq E$ et v est une fonction non-décroissante. Le jeu est <u>à somme constante</u> (ou <u>à somme zéro</u>) s'il y a égalité dans (8.1) dès que $A+B=E$; il est <u>inessentiel</u> s'il y a égalité toujours, c.à.d. si la fonction v est <u>additive</u>, ce qui est équivalent avec $v(E)=0$ et avec $v(X)=0$ pour chaque $X \subseteq E$.

Une <u>imputation</u> est une distribution du revenu total v(E) sur les n joueurs. La somme totale i(A) qu'une coalition virtuelle $A \subseteq E$ obtient est une fonction <u>additive</u> d'ensemble:

$$i(A+B) = i(A) + i(B) \tag{8.2}$$

dès que A et B sont disjoints. Dès que les membres d'un ensemble A peuvent, en se coalisant, enforcer une somme, à savoir $v(A)$, qui surpasse la somme $i(A)$ qui leur est imputée, l'imputation est instable. Pour qu'une imputation i soit stable, il est donc nécessaire que

$$i(A) \geqslant v(A), \tag{8.3}$$

pour chaque $A \subseteq E$, tandis que $i(E) = v(E)$. On dérive facilement que chaque imputation est instable pour un jeu essentiel à somme constante.

6. Plusieurs auteurs (e.a. L.S. Shapley, H. Raiffa, R.D.Luce) se sont occupés des questions de stabilité des coalitions et des imputations "justes" en un sens ou un autre. Puisque la difficulté ne peut pas encore être considérée être résolue, il est très important de continuer ces efforts. Peut-être on pourrait tâcher d'incorporer dans la théorie quelques phénomènes qu'on peut établir pour les coalitions réelles plus ou moins stables.

a. Il y a des "noyaux" naturels de coalitions, p.e. des groupes linguistiques, éthiques, religieux, nationaux, professionnels, géographiques, etc..Donc parmi les coalitions virtuelles quelques-unes se coalisent plus facilement que les autres. Une (parmi plusieurs autres) manières d'incorporer ce fait dans la théorie serait de considérer l'ensemble des "joueurs" comme un ensemble distancié, et d'introduire une "force coalisante" diminuante lorsque la"distance"croît.

b. On pourrait aussi tenir compte de ce qu'à part des "coalitions naturelles" il y a aussi des "disalitions" naturelles, qui peuvent être caracterisées par l'adage "non tali auxilio" ou "je ne veux pas jouer avec toi". Si l'on se méfie de quelqu'un, le plus il promet en imputation, le moins on est incliné d'accepter l'offre.

c. Les coalitions possèdent une sorte d'"inertie". Il "coûte" toujours quelque chose -- soit au sens matériel ou non -- de rompre une coalition.

d. Les imputations étant en réalité des fonctions continues du temps, on peut remarquer que la stabilité d'une coalition à un instant déterminé ne dépend pas seulement de l'imputation à ce moment, mais aussi des espérances des imputations futures. En particulier la dérivée première joue un rôle d'importance ("Ce n'est pas encore bon, mais ça va mieux déjà"), mais aussi la valeur asymptotique prévue.

e. La "valeur" d'une coalition C est le revenu dont elle se peut s'assurer lorsque tous les autres joueurs se coalisent aussi. Mais souvent ceux-ci ne se coalisent pas. Alors il est bien possible que C peut obtenir plus que $v(C)$. Mais on ne sait pas combien, puisqu'il n'existe pas de théorie des jeux à plus de deux personnes sauf celle qui se réduit à celle-ci au moyen des coalitions. Un phénomène curieux de notre âge est qu'une coalition C, qui peut disposer de $i(C) > v(C)$, diminue sa propre $i(C)$ pour le donner à une coalition disjointe B, afin de prévenir que celle-ci s'unie avec une troisième A, sans que B entre en coalition avec C. Il serait très intéressant d'avoir une théorie mathématique pour ce phénomène-là. En général on peut remarquer qu'en considérant ces phénomènes on voit l'importance des imputations s'agrandir et celle des valeurs s'évanouir.

7. Ars ponderandi et les décisions politiques.

Est-ce que la théorie mathématique de la décision, ou du choix pondéré, est-ce que la mathématique, est-ce que les mathématiciens peuvent contribuer à la solution des problèmes actuels de la politique internationale?

D'abord le prognostic n'est pas trop favorable.

"Le motif qui nous a fait adopter ce principe, est la grande probabilité que nous avons moins de changements, moins de grandes révolutions à attendre pour l'avenir, qu'il n'y en a eu dans le passé: le progrès des lumières en tout genre et dans toutes les parties de l'Europe, l'esprit de modération et de paix qui y règne, l'espèce de mépris où le Machiavelisme commence à tomber, semblent nous assurer que les guerres et les révolutions deviendront à l'avenir moins fréquentes;..."

C'est ce que Condorcet écrit en 1782 [6], sept ans avant la révolution française, dont il tomberait victime lui-même, et peu avant les guerres Napoléoniennes. Qu'est-ce qu'on peut attendre des hommes instruits dans la mathématique lorsqu'un homme comme Condorcet peut tellement se tromper? C'est vrai, il n'était pas un grand mathématicien, ni un homme pratique, mais un idéaliste, et le sens critique lui manquait. Mais ce sens manquait aussi à un très grand mathématicien comme Laplace.

---

6) Mémoire "Sur l'évaluation des Droits éventuels", Hist. de l'Acad. 1782. Citation d'après J. Todhunter, 1865, A history of the mathematical theory of probability.

Et aujourd'hui? Il est vrai qu'aucun mathématicien ne peut résoudre rigoureusement, ni même approximativement, les problèmes de premier ordre de la politique et que la politique moderne est beaucoup trop compliquée pour être traitée directement des méthodes mathématiques. Il est vrai que pour les problèmes véritablement importants on ne connaît, même approximativement, ni les utilités, ni les probabilités, ni même les "règles du jeu". Il est vrai que pour ces problèmes-ci la théorie de la décision telle quelle n'offre presqu'aucune aide, car un véritable problème de décision n'est pas: déterminer l'optimum parmi un ensemble préconçu de stratégies, mais: <u>trouver une nouvelle stratégie</u> qui, en tant que possible, est préférable à toutes-celles qu'on connait. Il est vrai, enfin, que les mathématiciens -- et j'y comprends les "théoriciens du choix pondéré" -- tendent parfois à surestimer leur science, et qu'ils sont assujettis aux mêmes influences politiques, économiques et idéologiques que chacun, quoique souvent ils savent mieux éviter d'en être entièrement maîtrisés.

Mais pourtant! Ils ont obtenu un tel savoir théorique et pratique de juger les décisions à prendre dans une situation donnée d'après leur mérite, et aussi, d'en trouver d'autres -- auxquelles ils donnent la forme de systèmes d'axiomes -- qu'on ne peut que regretter que leur savoir et leur expérience ne sont pas plus directement utilisés lorsqu'il s'agit des décisions vraiment importantes.

Il est difficile de s'imaginer que les "pondéristes" -- s'il m'est permis d'introduire ce terme ici -- feraient autant de fautes et d'aussi graves que les politiciens professionnels. Et toutefois: la politique, qu'est ce d'autre que l'Ars ponderandi?

Amsterdam, Centre Mathématique, mai 1959.

Bibliographie

[1] K.J. Arrow, T. Harris and J. Marschak, 1951, Optimal inventory policy. Econometrica 19, 250-272.

[2] K.J. Arrow, 1957, Decision theory and operations research. Op.Res.5, 765-774.

[3] R.B. Bush and C.F. Mosteller, 1951, A mathematical model for simple learning. Psychol.Review 58, 313-323.

[4.] D. van Dantzig, 1951, Carnap's foundation of probability theory, Synthese 8, p.459.

[5] D. van Dantzig, 1952, Utilité d'une distribution de probabilité ou distribution des probabilités des utilités? Econométrie, p.235-244; édition du C.N.R.S., no 40, Paris,1953.

[6] D. van Dantzig, 1956, Economic decision problem for flood prevention. Econometrica 24, 276-288.

[7] D. van Dantzig, 1957, Statistical priesthood I. Statistica Neerlandica 11, 1-16.

[8] D. van Dantzig, 1958, Het ekonomisch beslissingsprobleem inzake de beveiliging van ons land tegen stormvloeden, Rapport S222, 1957, Mathematisch Centrum, Amsterdam.

[9] D. Davidson and P. Suppes, Decision making, an experimental approach. Stanford University Press.

[10] A. Dvoretzky, J. Kiefer and J. Wolfowitz, 1952, The inventory problem. Econometrica 20, 187-222, 450-466.

[11] M. Friedman and L.J. Savage, 1948, The utility analysis of choices involving risk, Jn of Political economy 56, 277-304.

[12] M. Hausner, 1954, Multidimensional utilities, voir no 24, p.167-180.

[13] J.G. Kemeny and G.C. Thompson, 1957. The effect of psychological attitudes on the outcomes of games, voir no 25,III, p.273-298.

[14] R.D. Luce and H. Raiffa, 1957, Games and decisions, Wiley, New York.

[15] P. Massé, 1946, Les réserves et la régulation de l'avenir dans la vie économique, vol.2 Avenir aléatoire. Hermann & Cie, Paris.

[16] J. Milnor, 1954, Games against nature, voir no 24, p.49-59.

[17] J. von Neumann, 1928, Zur Theorie der Gesellschaftsspiele, Mathematische Annalen 100, 295-320.

[18] Th.L. Saaty, 1959, Mathematical methods of operations research. McGraw-Hill, New York.

[19] L.S. Shapley, 1953, A value for n-person Games, voir no 25, II, p.307-317.

[20] L.S. Shapley, 1953, Quota solutions of n-person Games, voir no 25, II, p.343-359.

[21] H.A. Simon, 1952, On the application of servomechanism theory in the study of production control. Econometrica 20, p.247-268.

[22] J. Todhunter, 1865, A History of the Math.Theory of Probability. Chelsea Publishing Company, N.Y., 1949.

[23] S. Vail, 1954, Alternative calculi of subjective probabilities, voir no 24, p.87-98.

[24] Decision Processes, 1954, Ed.by R.M. Thrall, C.H. Coombs and R.L. Davis, Wiley New York.

[25] Contributions to the theory of games,
I, 1950, ed. by H.W. Kuhn and A.W. Tucker
II, 1953, " " " " " " "
III, 1957, ed. by M. Dresher, A.W. Tucker and Ph. Wolfe, Princeton University Press.